# SUITES ARITHMÉTIQUES
# ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

## I- Suites arithmétiques

### 1) Définition

Exemple :

Considérons la suite $(u_n)$ où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.
Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Définition : Une suite $(u_n)$ est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre $r$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre $r$ est appelé **raison** de la suite.

Remarque :

La raison peut être un nombre négatif. On peut par exemple ajouter $-2$.

Propriété : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 + nr$

⚠️ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule :
$u_n = u_1 + (n-1)r$

## 2) Sens de variation

Propriété : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$.
- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

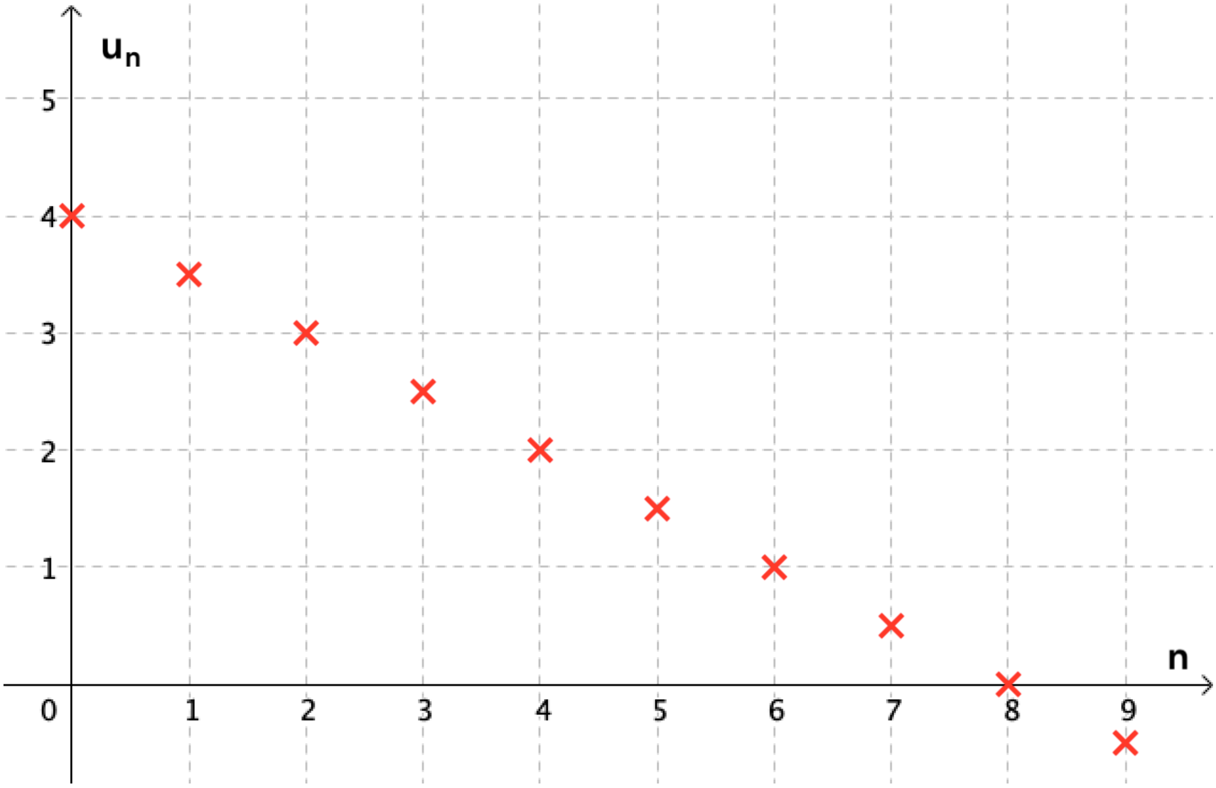
Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.

## 3) Représentation graphique

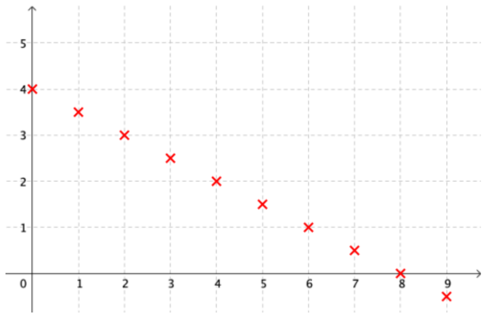
Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



un
n
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

| RÉSUMÉ | $(u_n)$ une suite arithmétique<br>- de raison $r$<br>- de premier terme $u_0$. | Exemple :<br>$r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = u_n - 0{,}5$<br>La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0{,}5$. |
| Propriété | $u_n = u_0 + nr$ | $u_n = 4 - 0{,}5n$ |
| Sens<br>De variation | Si $r > 0$ : $(u_n)$ est croissante.<br>Si $r < 0$ : $(u_n)$ est décroissante. | $r = -0{,}5 < 0$<br>La suite $(u_n)$ est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :<br>Les points de la représentation graphique sont alignés.<br>La croissance est linéaire. |  |

# II- Suites géométriques

## 1) Définition

Exemple :

Considérons la suite $(u_n)$ où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.

Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :

$u_0 = 5$,

$u_1 = 10$,

$u_2 = 20$,

$u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Définition : Une suite $(u_n)$ est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel $q$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre $q$ est appelé **raison** de la suite.

Exemple concret :

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.
Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$
$u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

Propriété : $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$.

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule :
$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

## 2) Sens de variation

Propriété : $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme non nul $u_0$.

Pour $u_0 > 0$ :

- Si $q > 1$ alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

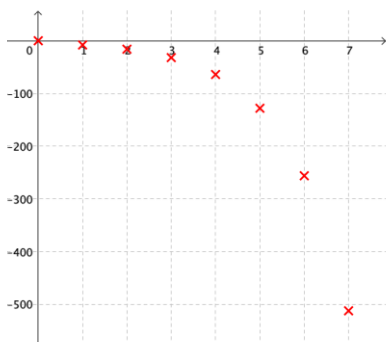
Pour $u_0 < 0$ :

- Si $q > 1$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(u_n)$ est croissante.

Remarques :

- Si $q = 1$, la suite est constante.
- Si $q \leq 0$, la suite n'est pas monotone.

# RÉSUMÉ

| | $(u_n)$ une suite géométrique<br>de raison $q$<br>de premier terme $u_0$. | **Exemple :**<br>$q = 2$ et $u_0 = -4$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = q \times u_n$ | $u_{n+1} = 2u_n$<br>Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété | $u_n = u_0 \times q^n$ | $u_n = -4 \times 2^n$ |
| Sens<br>de variation | Pour $u_0 > 0$ :<br>Si $q > 1$ : $(u_n)$ est croissante.<br>Si $0 < q < 1$ : $(u_n)$ est décroissante.<br><br>Pour $u_0 < 0$ :<br>Si $q > 1$ : $(u_n)$ est décroissante.<br>Si $0 < q < 1$ : $(u_n)$ est croissante. | $u_0 = -4 < 0$<br>$q = 2 > 1$<br>La suite $(u_n)$ est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarques :<br>Si $q < 0$ : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.<br>La croissance est exponentielle. |  |

## III- Sommes de termes consécutifs

### 1) Cas des suites arithmétiques

Propriété : $n$ est un entier naturel non nul, alors on a : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

### 2) Cas des suites géométriques

Propriété : $n$ est un entier naturel non nul et $q$ un réel différent de 1 alors on a :

$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme 1.