SECOND DEGRÉ

I- Fonction polynôme du second degré

<u>Définition :</u> On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

<u>Remarque :</u>

Une fonction polynôme du second degré s'appelle également « trinôme ».

<u>Exemples et contre-exemples :</u>

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5} \\ h(x) = 4 - 2x^2 \end{array}\right\}$ sont des fonctions polynômes du second degré.

$k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$

$m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme du premier degré (fonction affine).

$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

<u>Propriété :</u>

Toute fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

III- Variations, extremum et représentation graphique

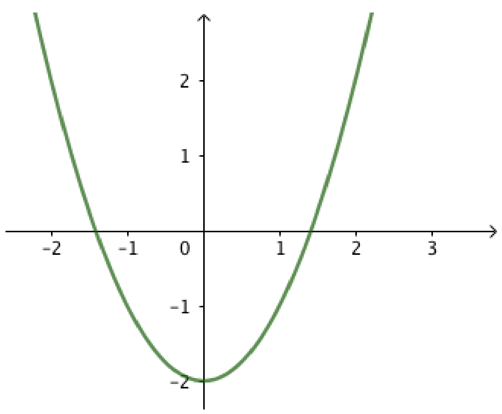
1) <u>Variations</u>

<u>Propriétés :</u>

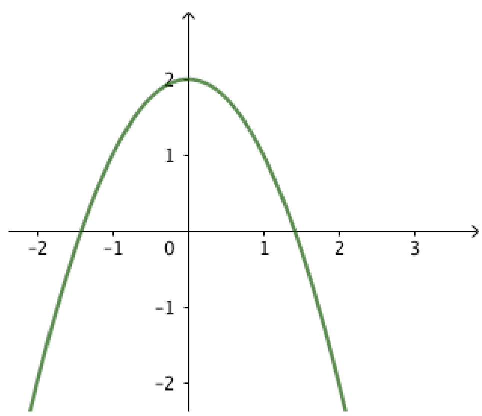
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : « ☺ ».
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : « ☹ ».

$a > 0$



$a < 0$



2) Extremum

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

On a : $2(x-1)^2 \geq 0$

Donc : $2(x-1)^2 + 3 \geq 3$

Soit : $f(x) \geq 3$

Or : $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

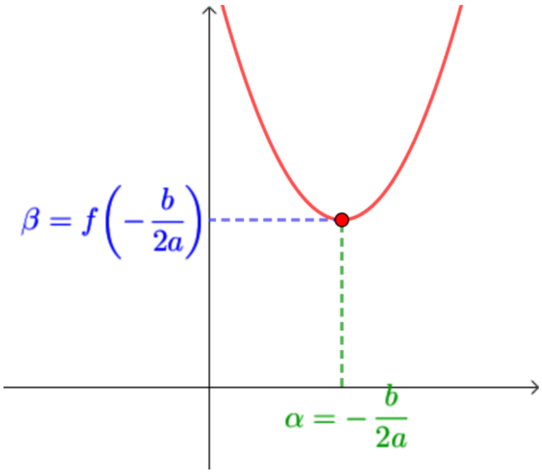
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$,

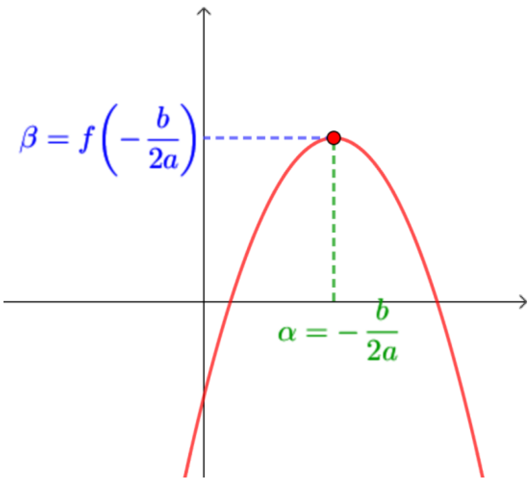
avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Propriété : Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Si $a > 0$: Si $a < 0$:





Définition :

La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une **parabole.**

Le point de coordonnées $(\alpha ; \beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole.

Il correspond à l'extremum de la fonction f.

Propriété :

La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

IV- Résolution d'une équation du second degré

<u>Définition :</u> Une **équation du second degré** est une équation de la forme
$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

<u>Exemple :</u>

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

<u>Définition :</u> On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Propriété :</u> Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

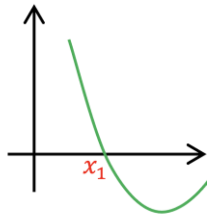
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

<u>Définition :</u>

Pour une fonction polynôme f du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle les **racines** de f.

Remarque : Dans la pratique, une racine x_1 de f vérifie $f(x_1) = 0$.

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.



Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

V- Factorisation et signe d'un trinôme

1) Factorisation

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec x_0 racine de f.
- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec x_1 et x_2 racines de f.

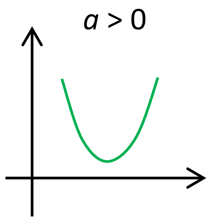
Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

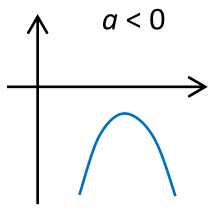
2) Signe d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: f ne possède pas de racine. Donc f ne s'annule pas.

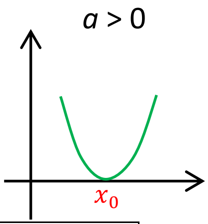


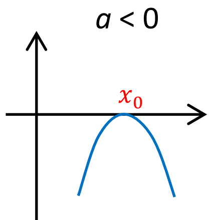


x	$-\infty$		$+\infty$
f		$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$-$	

- Si $\Delta = 0$: f possède une unique racine x_0. Donc f s'annule en x_0.

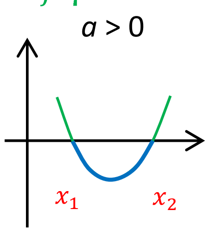


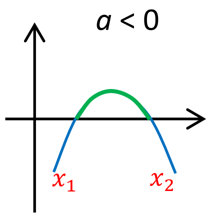


x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	$+$	0	$+$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	$-$	0	$-$

- Si $\Delta > 0$: f possède deux racines x_1 et x_2. Donc f s'annule en x_1 et x_2.





x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f	$-$	0	$+$	0	$-$