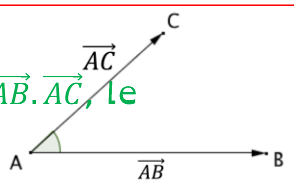
PRODUIT SCALAIRE

I- Définitions et propriétés

1) Définitions

Définition : Soit deux points A et B.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Définition : Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.
On appelle **produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$**, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$.



Propriété :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Remarques :

- $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».
- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$,

Exemple :
On donne : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.
Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité :

1) $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ 2) $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Identités remarquables :

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ $\longrightarrow$ On peut également noter : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

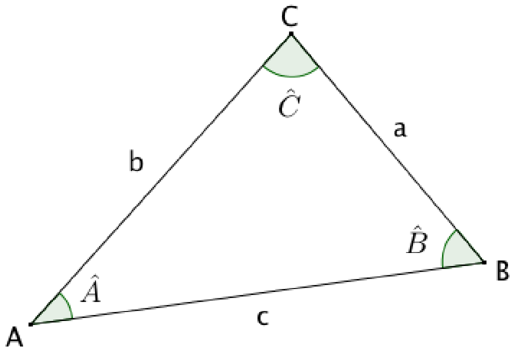
II- Produit scalaire et norme

Propriété : Soit A, B et C trois points. On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\,(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Théorème d'Al Kashi : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

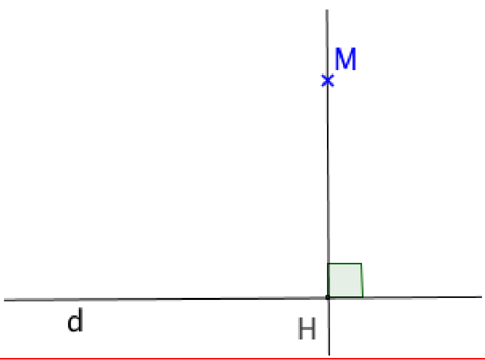


III- Produit scalaire et orthogonalité

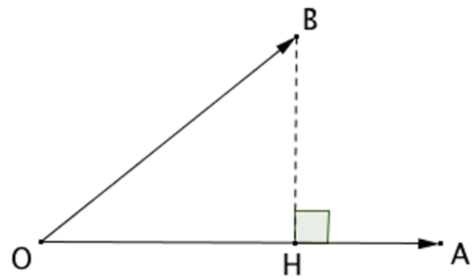
1) Projeté orthogonal

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition : Soit une droite *d* et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



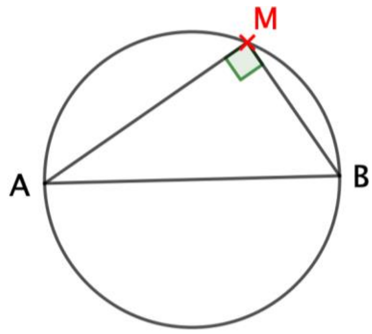
Propriété : Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs n
H est le projeté orthogonal du point B su
droite (OA).
On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



2) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Comme $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
L'ensemble des points M tel que le triangle ABM soit rectangle en M est donc le cercle de diamètre $[AB]$.



IV- Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.