# DÉRIVATION

## I- Limite en zéro d'une fonction

<u>Exemples :</u>

1) Soit la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction $f$ n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque $x$ se rapproche de 0.

| $x$ | -0,5 | -0,1 | -0,01 | -0,001 | ... | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,999 | ? | 2,001 | 2,01 | 2,1 | 2,5 |

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque $x$ se rapproche de 0.
On dit que la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction $g$ définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque $x$ se rapproche de 0.
On dit que la limite de $g(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

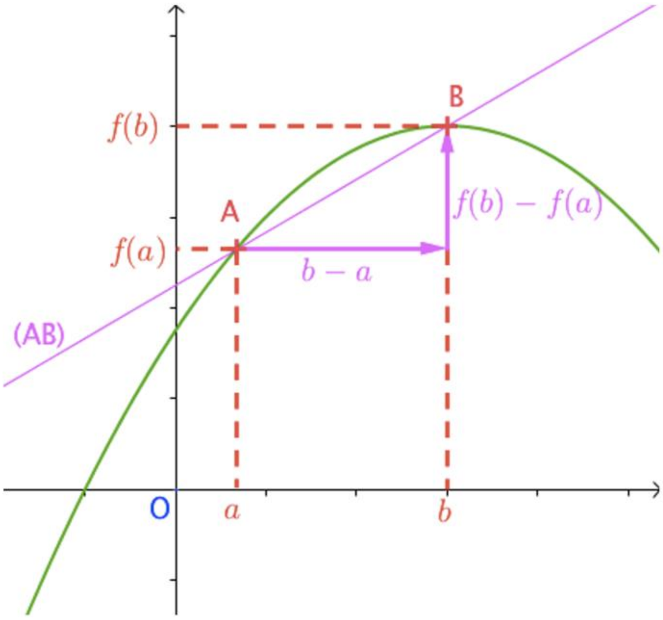
<u>Définition :</u> On dit que $f$ a pour **limite** $L$ lorsque $x$ tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de $L$ que l'on veut pourvu que $x$ soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 est égale à $L$.

## II- Nombre dérivé

### 1) Pente d'une droite (rappel)

Formule du taux d'accroissement :

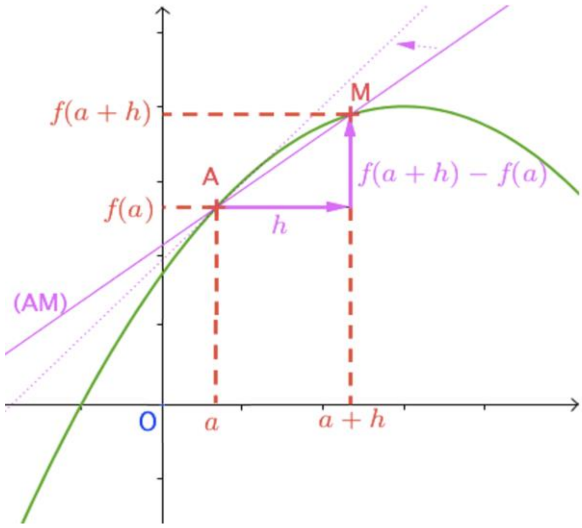
Sur le graphique suivant, la pente de la droite (AB) sécante à la courbe est égale à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.




### 2) Fonction dérivable

Sur le graphique ci-contre, la pente de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.




Lorsque M se rapproche de A, $h$ tend vers 0

($h \to 0$).

La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de $f$ en $a$ et se note $f'(a)$.

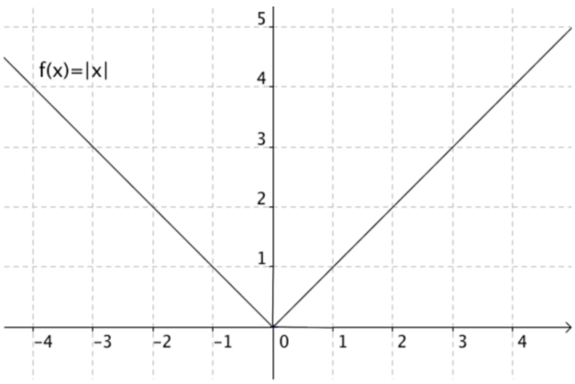
<u>Définition :</u> On dit que la fonction $f$ est **dérivable** en $a$ s'il existe un nombre réel $L$, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
$L$ est appelé le **nombre dérivé** de $f$ en $a$ et se note $f'(a)$.

<u>Remarque :</u>
Dans la définition, si $L$ n'est pas égal à un nombre, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$.
Par exemple, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}$ n'est pas un nombre. En effet, $\frac{1}{h}$ se rapproche de $+\infty$ lorsque $h$ se rapproche de 0.

## 3) Cas de la fonction valeur absolue

<u>Définition :</u> La **fonction valeur absolue** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

<u>Exemples :</u>
- $f(-5) = |-5| = 5$
- $f(4) = |4| = 4$




<u>Propriété :</u>
Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$
Si $x \leq 0$, alors $f(x) = |x| = -x$

**Propriété :** La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Éléments de démonstration :

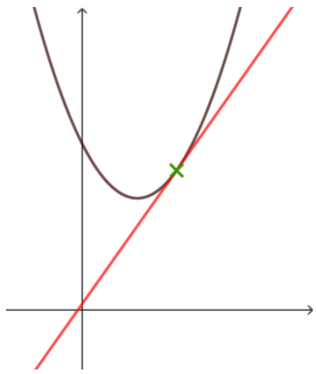
$$f(x) = \begin{cases} -x \; sur \; ]-\infty\,;0] \\ x \; sur \; [0\,;\,+\infty[ \end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;\,+\infty[$, la fonction valeur absolue est une fonction affine.

Remarque : Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

# III- Tangente à une courbe

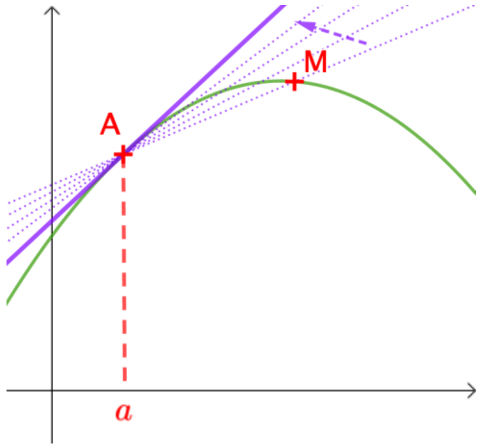
## 1) Pente de la tangente



Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.

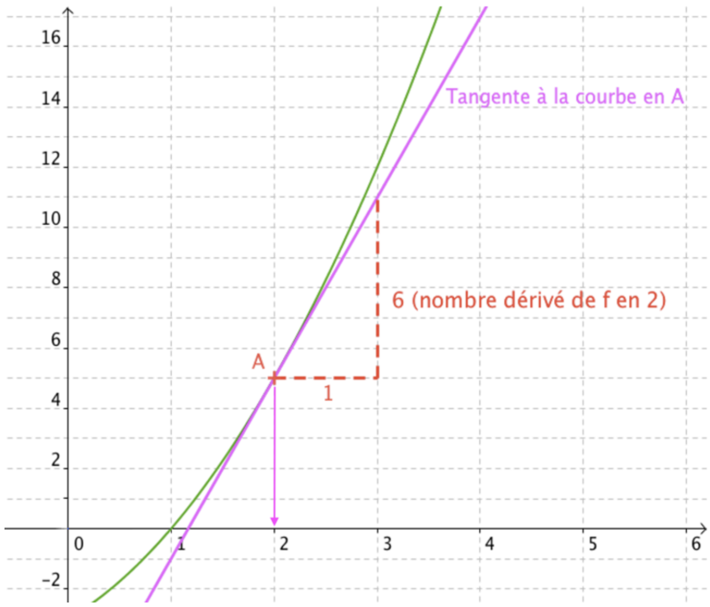
**Définition :** La tangente à la courbe au point A d'abscisse $a$ est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite sécante (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.
Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$ défini dans le paragraphe précédent.




<u>Exemple :</u>

Sur le graphique ci-contre, on lit que la pente de la tangente en 2 est égale à 6.
On a donc : $f'(2) = 6$




## 2) <u>Équation de la tangente</u>

<u>Propriété :</u> Une équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$
est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.