FONCTION EXPONENTIELLE

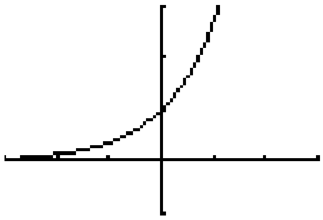
I- Introduction de la fonction exponentielle

1) Définition

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence :
$\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra plus bas que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.
Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

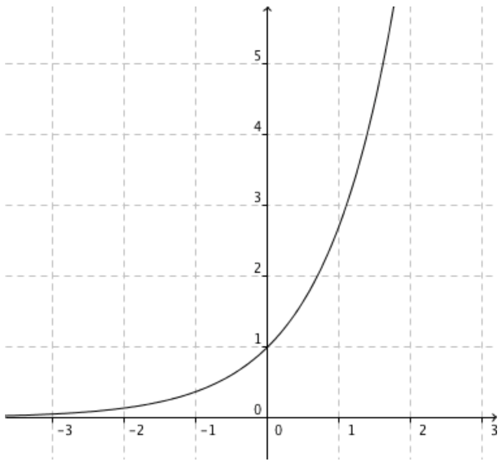
2) Variations et courbe

Par définition de la fonction exp, on a :

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x)$

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.



3) Propriétés

Théorème : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement. On l'appelle relation fonctionnelle.

Corollaires :

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ ou encore $\exp(x)\exp(-x) = 1$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

b) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big)$

$= \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\ \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

II- Le nombre e

1) Le nombre e

Notation : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.

On a ainsi $\exp(1) = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

e^1

2.718281828

Notation nouvelle :

$\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

Notation : On note pour tout x réel,

$\exp x = e^x$

Dans la suite, on utiliser la notation e^x pour désigner la fonction exponentielle.

2) Propriétés

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

3) Équations et inéquations contenant des exponentielles

Propriétés :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

III- Étude de la fonction exponentielle

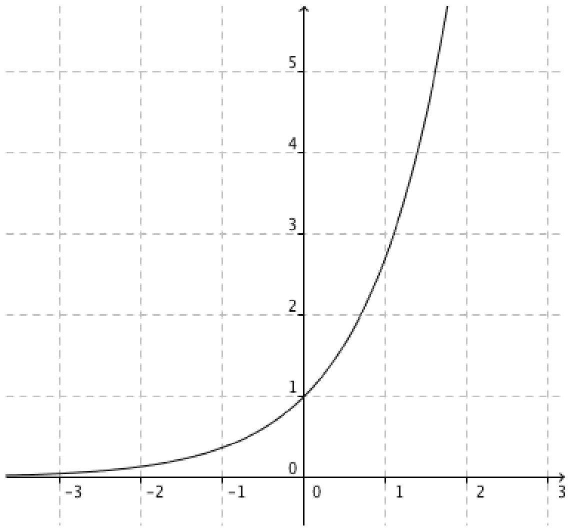
1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

2) Variations et courbe de la fonction exponentielle

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$+\infty$ 0



IV- Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$

1) Dérivabilité

Propriété :
La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = ke^{kt}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \longmapsto g(at+b)$ est $t \longmapsto ag'(at+b)$.
En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

2) Variations et courbe

Propriété :
Si $k > 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
Si $k < 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

<u>Démonstration :</u>

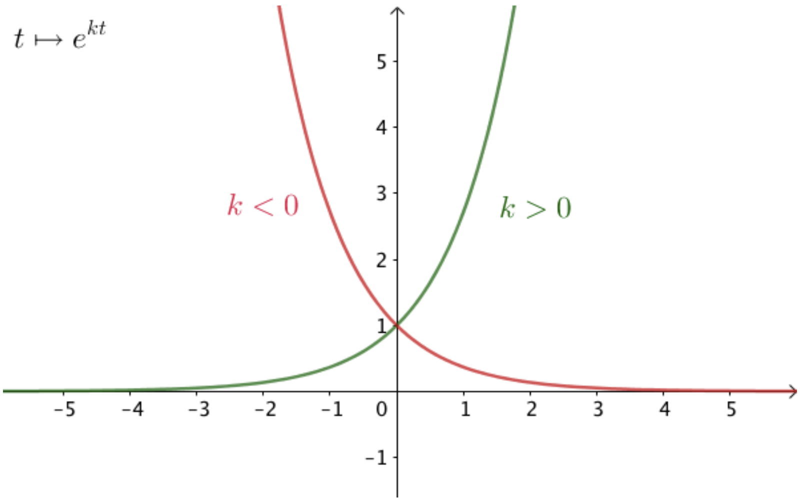
On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$

Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.

Donc le signe de la dérivée $t \longmapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k.

Si $k > 0$ alors la dérivée est strictement positive et donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$ alors la dérivée est strictement négative et donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.



V- Exponentielle et suite géométrique

<u>Propriété :</u> Pour tout réel a, on a : $e^{na} = (e^a)^n$

La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.