Étudier une fonction $t \longmapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10]
et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Correction

1) $f'(t) = A \times 0{,}14e^{0{,}14t} = 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14f(t)$.
La fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0{,}14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0{,}14\times0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0{,}14t}$.

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit que la fonction $t \longmapsto e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

4) a) $f(3) = 50\,000\, e^{0{,}14\times3} = 50\,000\, e^{0{,}42} \approx 76\,000$
$f(5{,}5) = 50\,000\, e^{0{,}14\times5{,}5} = 50\,000\, e^{0{,}77} \approx 108\,000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y_1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547