

Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f :

a) $f(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x}$

e) $f(x) = \frac{6x - 5}{x^2 - 2x - 1}$

Correction

a) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 3 \times 2x = 6x$

$$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 5x^3 \rightarrow u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

$$v(x) = -3x^2 \rightarrow v'(x) = -3 \times 2x = -6x$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x) + v'(x) = 15x^2 + (-6x) = 15x^2 - 6x$$

c) $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

$$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$$

$$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$$

$$= 45x^2 + 34x - 4$$

d) $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$

Donc : $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

e) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow v'(x) = 2x - 2$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$$= \frac{6(x^2 - 2x - 1) - (6x - 5)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 1)^2}$$
$$= \frac{6x^2 - 12x - 6 - 12x^2 + 12x + 10x - 10}{(x^2 - 2x - 1)^2}$$
$$= \frac{-6x^2 + 10x - 16}{(x^2 - 2x - 1)^2}$$