Étudier une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Correction

a) $f(x) = (x+1)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x + 1 \;\rightarrow\; u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \;\rightarrow\; v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times e^x + (x+1)e^x \\ &= e^x + xe^x + e^x \\ &= 2e^x + xe^x \\ &= e^x(2 + x) \end{aligned}$$

← Factoriser $f'(x)$ permet d'étudier son signe à la question b.

b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.

On commence par résoudre l'équation $x + 2 = 0$.

Soit : $x = -2$.

La fonction $x \mapsto x + 2$ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 1 est positif.

Donc la fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = -2$) puis positive (après $x = -2$).

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

$$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}.$$

c) $f(0) = (0+1)e^{0} = 1$

$f'(0) = (0+2)e^{0} = 2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit :

$$y = 2x + 1$$

d)