Étudier le sens de variation d’une suite

a) Pour tout entier n, on donne : $u_n = n^2 - 4n + 4$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang à déterminer.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Correction

a) - On commence par calculer la différence u_{n+1} -

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - (n^2$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4$$
$$= 2n - 3$$

On calcule $u_{n+1} - u_n$:
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$,
la suite est

- On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.

Soit $n \geq 2$, car n est entier.

- On a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$, pour $n \geq 2$.

On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

b) On commence par calculer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

Or $0 \leq n \leq n+2$, donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et donc $v_{n+1} \leq v_n$ (car $v_n > 0$).

On en déduit que (v_n) est décroissante.