Démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Correction

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, & si\ h > 0. \\ \frac{-h}{h} = -1, & si\ h < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h. La limite ne peut pas être égal à la fois à 1 et à -1.

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.