Déterminer un extremum d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) En déduire que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur où il est atteint.

e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point de l'extremum.

Correction

a) $f'(x) = 10x - 10$

b) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Soit : $10x - 10 = 0$

$$10x = 10$$

$$x = \frac{10}{10} = 1.$$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 10 est positif.

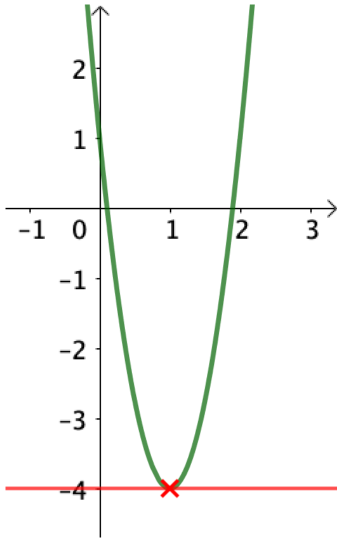
f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 1$) puis positive (après $x = 1$).

c) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$ $+\infty$			1
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$ -4

$f(1) = 5 \times 1^2 - 10 \times 1 + 1 = -4$

d) On lit dans le tableau de variations que la fonction f admet un minimum égal à -4 en
$x = 1$.



e) Au point de l'extremum de la fonction, la dérivée s'annule.
On a $f'(1) = 0$.
La tangente est donc de pente nulle et parallèle à l'axe des abscisses.
Comme $f(1) = -4$, l'équation de la tangente est
$y = -4$.