Étudier les variations d'une fonction polynôme du 3e degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

a) $f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$.

b) <u>Étude du signe de la dérivée :</u>

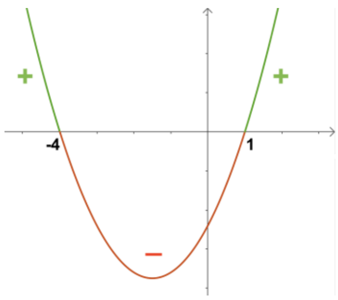
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9-\sqrt{225}}{2\times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\times 3} = 1$

Comme $a = 3 > 0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).

La dérivée est donc d'abord positive, puis négative, puis positive.



c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$ $+\infty$		-4				1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	61	↘		↗	$-\dfrac{3}{2}$

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$$

$$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$$