

Démontrer qu'une fonction est dérivable

Soit la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

Correction

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6+h)}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6 + 0 = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.

Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.