# VARIATIONS D'UNE FONCTION

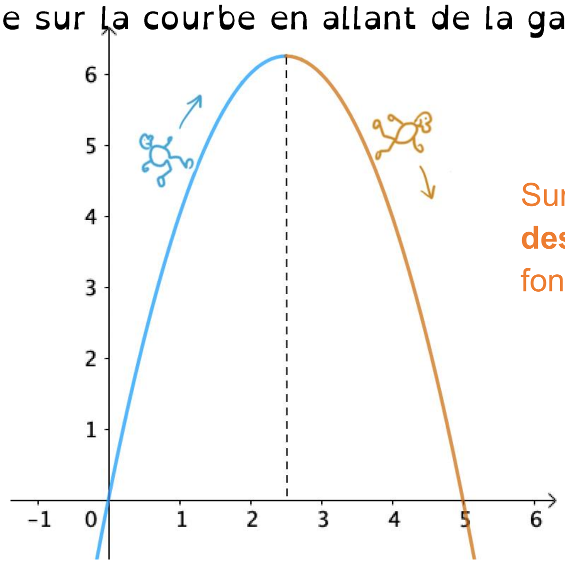
## I- Fonctions croissantes et fonctions décroissantes

### 1. Définitions

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction $f$ définie par $f(x) = 5x - x^2$.

Lorsqu'on se promène sur la courbe en allant de la gauche vers la droite :

Sur l'intervalle $[0\,;\;2{,}5]$, on **monte**, on dit que la fonction est **croissante.**



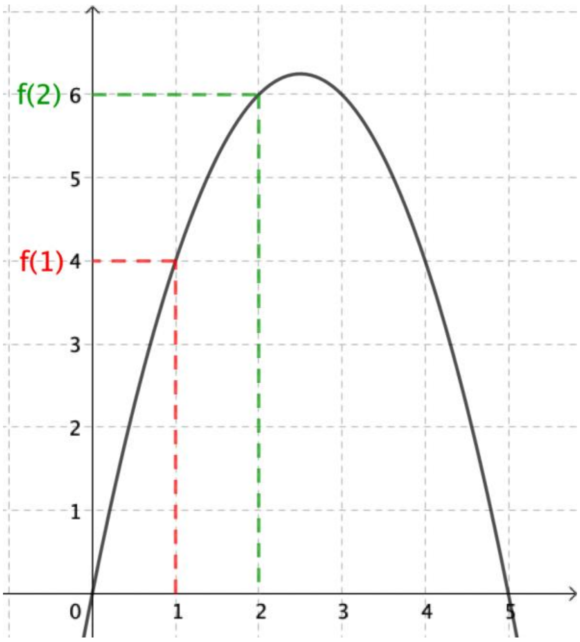

Sur l'intervalle $[2{,}5\,;\;5]$, on **descend**, on dit que la fonction est **décroissante**.

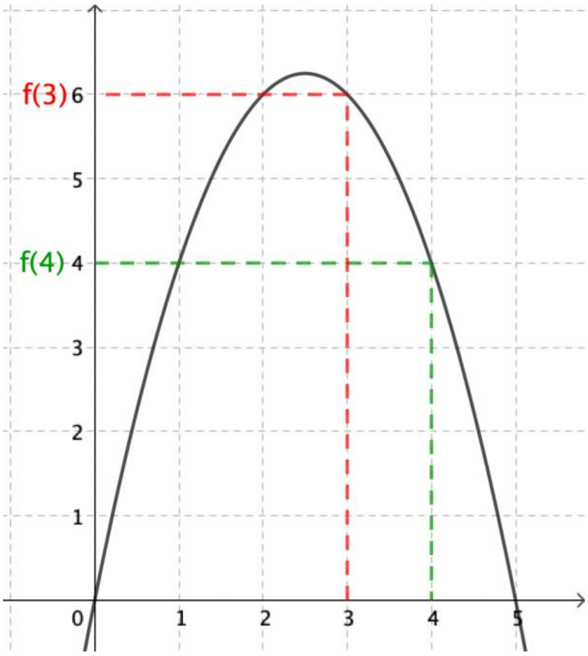
$f$ est croissante sur $[0\,;\;2{,}5]$ :

Si $x$ augmente $(1 < 2)$,

$f$ est décroissante sur $[2{,}5\,;5]$ :

Si $x$ augmente $(3 < 4)$,

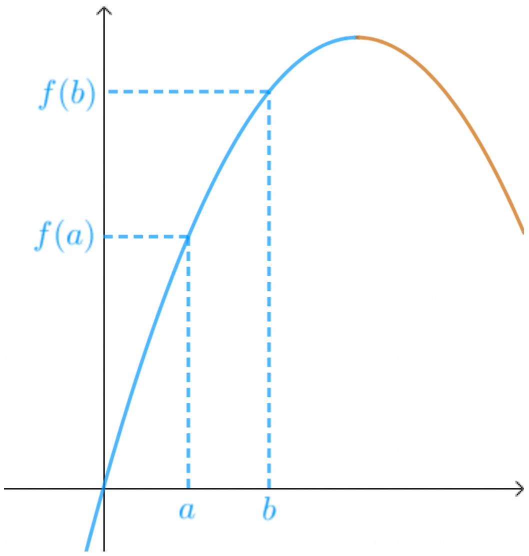


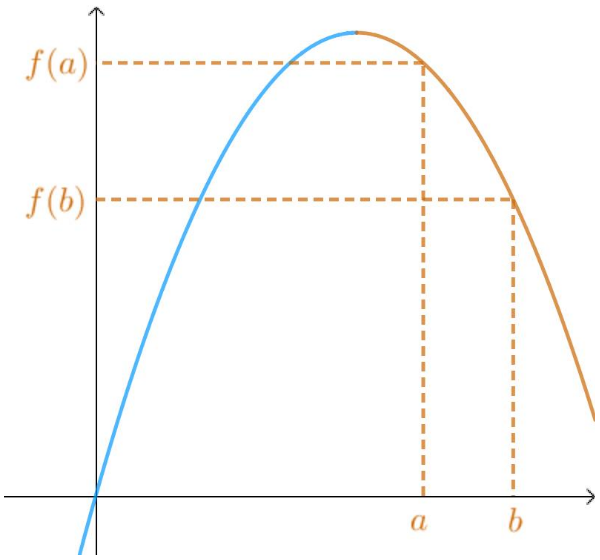




Définitions : Sur un intervalle $I$,

- une fonction $f$ est **croissante**, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

- une fonction $f$ est **décroissante**, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.




<u>Remarques :</u>

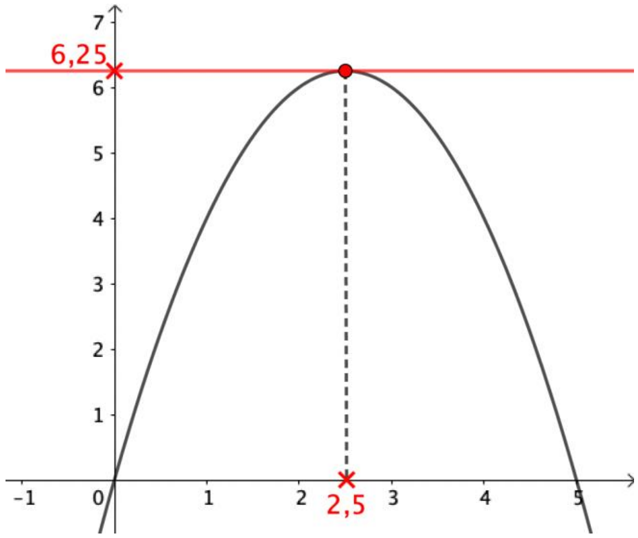
- Pour une fonction $f$ **constante** : on a toujours $f(a) = f(b)$.
- Dire que $f$ est **monotone** signifie que $f$ est soit croissante, soit décroissante.
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.

## 2. Maximum et minimum

Exemple : On reprend la fonction $f$ définie dans l'exemple de la partie 1.

Sur l'intervalle $[0\,;\,5]$, on a : $f(x) \leq f(2{,}5) = 6{,}25$.

On dit que $6{,}25$ est le maximum de la fonction $f$. Ce maximum est atteint en $2{,}5$.



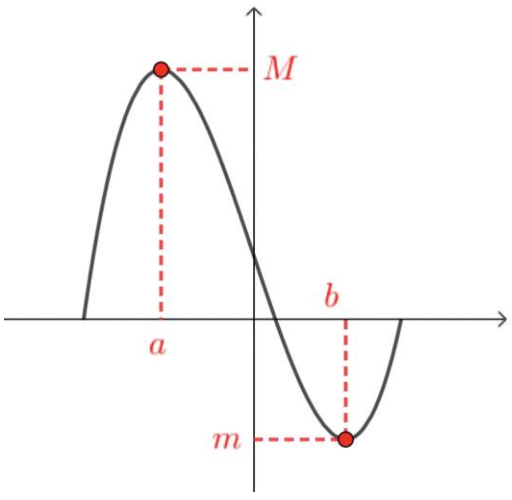

Définitions : Sur un intervalle $I$,

- une fonction $f$ admet un **maximum** $M$ en $a$,

si pour tout $x$, $f(x) \leq f(a) = M$.

- une fonction $f$ admet un **minimum** $m$ en $b$,

si pour tout $x$, $f(x) \geq f(b) = m$.




Remarque : Un minimum ou un maximum s'appelle un **extremum**.

### 3. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

## II- Cas des fonctions affines

### 1. Définitions

Définitions : Une **fonction affine** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

Lorsque $b = 0$, la fonction $f$ définie par $f(x) = ax$ est une **fonction linéaire.**

Exemples :

- Fonction affine : $f(x) = -x + 6$
- Fonction linéaire : $g(x) = -\frac{2}{7}x$

### 2. Variations

Propriété : Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors $f$ est croissante.

Si $a < 0$, alors $f$ est décroissante.

Si $a = 0$, alors $f$ est constante.

## 3. Représentation graphique

**Propriétés :**

- Une fonction affine est représentée par une droite.

- Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine du repère.

Soit la fonction affine $f$ définie par $f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ s'appelle le **coefficient directeur**

$\boldsymbol{b}$ s'appelle l'**ordonnée à l'origine.**

Propriété des accroissements : Soit la fonction affine $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ et deux nombres réels distincts $m$ et $n$.

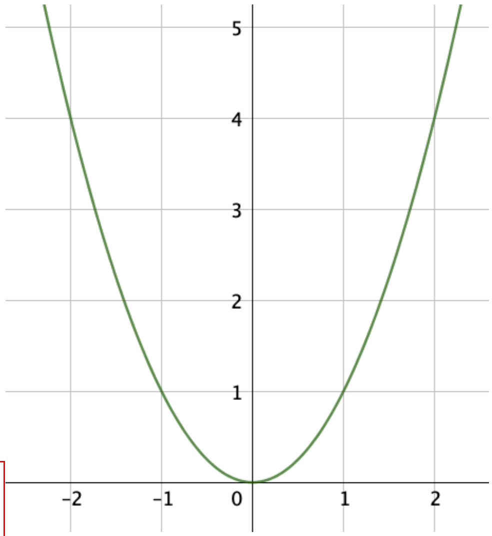
Alors : $a = \dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}$

Remarque : Dans le calcul de $a$, inverser $m$ et $n$ n'a pas d'importance.

En effet : $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n} = \dfrac{f(n)-f(m)}{n-m}$

# III- Cas des fonctions de référence

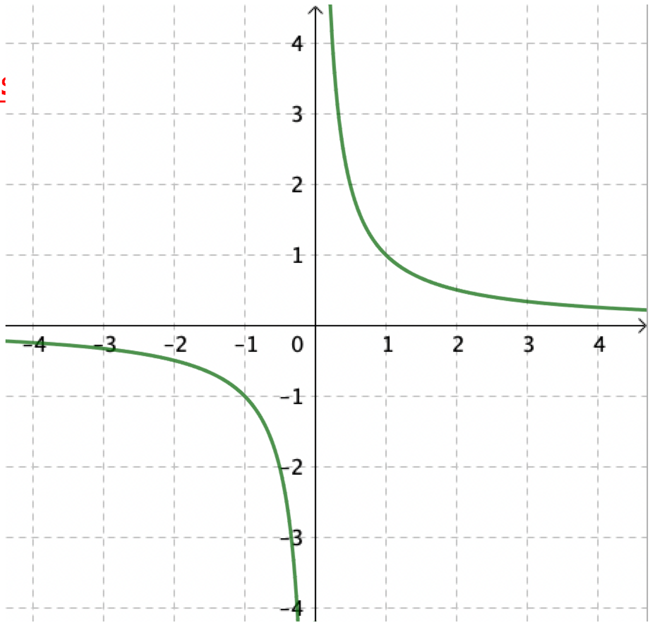
## 1. Variations de la fonction carré




**Propriété :**

La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

## 2. Variations de la fonction invers




**Propriété :**

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

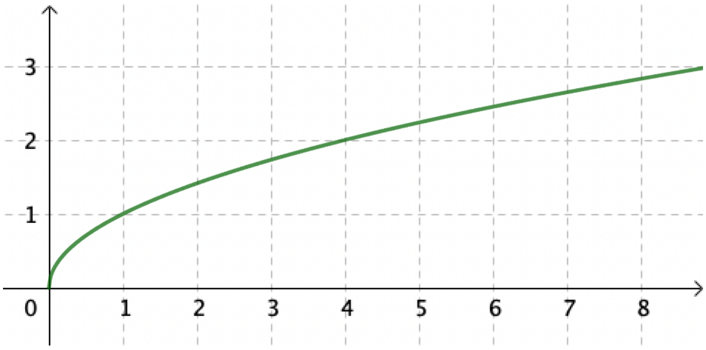
Propriété : Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$$a < b \quad \textit{est équivalent à} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

### 3. Variations de la fonction racine carrée

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

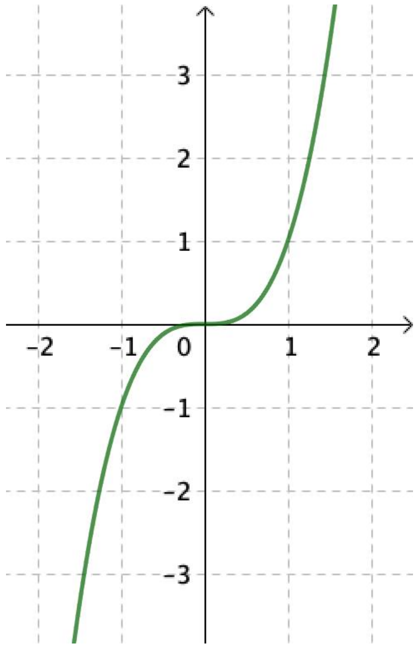



Propriété : Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels positifs, on a alors :

$$a < b \quad \textit{est équivalent à} \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

## 4. Variations de la fonction cube




**Propriété :** La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Propriété :** $a < b$ *est équivalent à* $a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.